08-10-2018

$\mathbb{C} = \{a+bi : a,b \in \mathbb{R}\}$

Ορισμός: Έστω $a+bi \in \mathbb{C}$ με $a,b \in \mathbb{R}$. Ο z λέγεται πραγματικός αν $b=0$. Ο z λέγεται φανταστικός αν $a=0$.

Αν $z = a+bi$, με $a,b \in \mathbb{R}$, το μέτρο του z είναι $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ και συζυγής $\bar{z} = a-bi = a+(-b)i$

Παραδείγματα: Το $5 \in \mathbb{C}$ είναι πραγματικός, το $-3i \in \mathbb{C}$ είναι φανταστικός, το $-2-\pi i$ δεν είναι ούτε πραγματικός ούτε φανταστικός.

Αν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ τότε ο z αντιστρέφεται στο $\mathbb{C}$. Συμβολίζουμε τον αντίστροφο z^{-1} ή $\frac{1}{z}$ και ισχύει

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

→ Τι είναι το i^3;

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$ άρα φανταστικός.

→ Τι είναι το i^4;

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ άρα πραγματικός.

Παρατήρηση: Ταυτίζουμε το $\mathbb{R}$ με το σύνολο των πραγματικών στοιχείων του $\mathbb{C}$ ως εξής: Ταυτίζουμε το $a \in \mathbb{R}$ με το $a+0i \in \mathbb{C}$.

→ Από τον ορισμό $+$ και $\cdot$ στο $\mathbb{C}$, έπεται ότι περιορίζονται εις πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς έχουμε τις γνωστές πράξεις $+$ και $\cdot$ στο $\mathbb{R}$.

(πχ απαιτ. $(a+0i)(b+0i) = ab + 0bi + 0ai + 0^2 i^2 = ab$)

→ Επίσης το μέτρο |·| των μιγαδικών περιορισμένο στο σύνολο των πραγματικών μιγαδικών είναι η απόλυτη τιμή στο $\mathbb{R}$ γιατί $|a+0i| = \sqrt{a^2} = |a|$ για $a \in \mathbb{R}$.

Φυλλάδιο 1 - Άσκηση 5:

α) Ν.Δ.Ο. · z είναι πραγματικός αν-ν $z = \bar{z}$

· z είναι φανταστικός αν-ν $z = -\bar{z}$

Έστω $z = a + bi$, με $a, b \in \mathbb{R}$.

και $\bar{z} = a - bi$.

Υποθ. ότι z: πραγματικός. Τότε $b = 0$ άρα $\bar{z} = a - 0i = a = z$

Αντίστροφα υποθέτουμε $z = \bar{z} \Rightarrow a + bi = a - bi = a + (-b)i$

$$\text{Άρα } \begin{cases} a = a \\ b = -b \end{cases} \Rightarrow b = 0.$$

Ομοίως και για z: φανταστικό.

Πρόταση: Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε

i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

iii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Απόδειξη:

ii) Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

$z_1 \cdot z_2 = (ac - b \cdot d) + (ad + bc)i$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$

Έστω $\bar{z}_1 = a - bi$, $\bar{z}_2 = c - di$

άρα $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (a + (-b)i)(c + (-d)i) =$

$= ac - adi - bci - (-b)(-d) = \overline{z_1 z_2}$

Ομοίως αποδεικνύονται τα i, iii.

Παρατήρηση: Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (Αυτό σημαίνει $z \in \mathbb{C}$ και $z \neq 0$).

Τότε $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Απόδειξη: Έχουμε $z \cdot \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \left|z \cdot \frac{1}{z}\right| = |1| = 1$

$\xRightarrow{\text{Πρόταση}} |z| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| = 1$. Άρα $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Φυλλάδιο 1 - Άσκηση 3.

γ) Έστω $z = (1-i)^2(1+i)^4$. Βρείτε το $|z|$.

Αφού έχουμε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$ έχουμε:

$|z| = |(1-i)^2||(1+i)^4| = |1-i|^2 |1+i|^4 =$

$= \left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^4 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{4})^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$.

δ) Έστω $z = \frac{3+i}{4-3i}$, τότε $|z| = \frac{|3+i|}{|4-3i|} =$

$= \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

Φυλλάδιο 1 - Άσκηση 6

Αν $z_1 = \frac{5-9i}{7+4i}$ και $z_2 = \frac{5+9i}{7-4i}$ ν.δ.ο. $z_1 + z_2$ είναι

πραγματικός και ο $z_1 - z_2$ είναι φανταστικός

ΛΥΣΗ:

$$z_1 = \frac{5-9i}{7+4i} \cdot \frac{\overline{(7+4i)}}{\overline{(7+4i)}} = \frac{(5-9i)(7-4i)}{(7+4i)(7-4i)} =$$

(Σημ. πολλ/ζουμε και διαιρούμε με το συζυγή του παρονομαστή)

$$= \frac{5\cdot 7 + (-9)(-4)i^2 + (-9)\cdot 7i + 5(-4)i}{7^2+4^2} = \frac{35-36+(-83)i}{65} =$$

$$= \frac{-1}{65} + \frac{(-83)}{65} i$$

$$z_2 = \frac{5+9i}{7-4i} = \frac{(5+9i)\overline{(7-4i)}}{(7-4i)\overline{(7-4i)}} = \frac{(5+9i)(7+4i)}{7^2+4^2} =$$

$$= \frac{-1+83i}{65} = \frac{-1}{65} + \frac{83i}{65}$$

Άρα $z_1 + z_2 = -\frac{2}{65}$ άρα πραγματικός. και

$z_1 \cdot z_2 = \frac{-2\cdot 83}{65} i$ άρα φανταστικός.

Φυλλάδιο 1 - Άσκηση 7.

α) Να βρείτε $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $(x+y) + (x-y)i = 3 - i$. (*)

ΛΥΣΗ:

Αφού $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+y) \in \mathbb{R}$ και $(x-y) \in \mathbb{R}$. Αφού από μοναδικότητα γραφής μιγαδικού στην μορφή: $\alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η (*) $\Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

Αντίστροφα, για $x=1$, $y=2$ ισχύει η (*)

β) Να βρείτε $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $(3-2i)^2 - (x+yi) = x - yi$ (**)

ΛΥΣΗ: $(3-2i)^2 - (x+yi) = (3-2i)(3-2i) - (x+yi) =$

$= (3 \cdot 3 + (-2)(-2)i^2) - 6i - 6i - (x+yi) =$

$= 5 - 12i - (x+yi) =$

$= (5-x) + (-12-y)i$

Άρα η (**) $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5-x=x \\ -12-y=-y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5 \\ -12=0 \end{cases}$ αδύνατο.

Άρα $\nexists\, x, y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η (**).

Πρόταση: Έστω $a,b,c \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$. Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha z^2 + bz + c = 0$ (*) και αναζητούμε τις ρίζες $z \in \mathbb{C}$.

ΛΥΣΗ: Θέτουμε $\Delta = b^2 - 4ac$

· Αν $\Delta > 0$ η (*) έχει 2 ρίζες στο $\mathbb{C}$, που είναι και οι δύο πραγματικοί μιγαδικοί:

$$\rho_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \rho_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

· Αν $\Delta = 0$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{C}$, (που λέμε είναι διπλή) και είναι πραγματική: $\rho = \frac{-b}{2a}$

· Αν $\Delta < 0$ θέτουμε $e = \sqrt{|\Delta|} \cdot i$.
Τότε η (*) έχει 2 ρίζες στο $\mathbb{C}$:

$$\rho_1 = \frac{-b+e}{2a}, \quad \rho_2 = \frac{-b-e}{2a}.$$

Παραδείγματα:

1) $z^2 + 1 = 0$ με $z \in \mathbb{C}$

Τότε $\alpha = 1$, $b = 0$, $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = -4$.

$e = \sqrt{|\Delta|}\, i = \sqrt{|-4|}\, i = 2i$

$$\rho_1 = \frac{2i}{2} = i$$

$$\rho_2 = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Φυλλάδιο 2 - Άσκηση 1.

Να λύσετε για z μιγαδικό αριθμό τις εξισώσεις:

a) $z^2 - 3z + 2 = 0$

b) $z^2 - 2z + 3 = 0$

c) $z + \frac{1}{z} = 1.$

ΛΥΣΗ: a) $\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1.$

$$\rho_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \rho_1 = 2 \\ \rho_2 = 1. \end{cases}$$

b) $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8.$

$e = \sqrt{|-8|}\, i = 2\sqrt{2}\, i \in \mathbb{C}.$

$$\rho_1 = \frac{-b-e}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{2}i}{2} = 1 - i\sqrt{2}$$

$$\rho_2 = \frac{-b+e}{2a} = 1 + i\sqrt{2}.$$

c) Πρέπει $z \neq 0$. Τότε, για $z \neq 0$:

$$z + \frac{1}{z} = 1 \iff z\left(z + \frac{1}{z}\right) = z \iff z^2 + 1 = z \iff z^2 - z + 1 = 0$$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3.$

$e = \sqrt{|\Delta|}\, i = \sqrt{3}\, i$

$$\rho_{1,2} = \frac{-b \pm e}{2a} = \begin{cases} \rho_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \rho_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$